

システム情報工学演習第二 2020. 12. 15

多次元計測(1) 計測精度の限界

篠田 裕之

<https://hapislab.org/>

hiroyuki_shinoda@k.u-tokyo.ac.jp

今回の演習

「ノイズの中でどれだけ情報が送れるか？」

「理論的な計測精度の限界は？」

を定量的に見積もる実用的方法を習得する。

いろいろな計測法、推定アルゴリズムを試してみる前に理論限界を見積もることができる。

(本日の方法は)ノイズがランダムで、そのエネルギー(後述)以外の情報がない場合には厳密な理論限界を与える。

*ノイズが完全にランダムでない場合には、精度向上の余地がある(その逆の場合もある)。

進め方

1. 演習問題1～5を解答し、1週間以内に提出して下さい。
2. 授業後にレポート課題1を解き、提出して下さい。

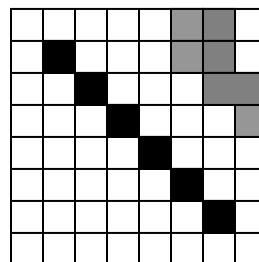
レポート課題1の提出期限は1月4日とします。

今週中に解けてしまったら演習問題と同じ提出先に提出して下さい。

3. 次回12月22日も同様なやり方で進めます。

「パターン」の計測

1) 空間的なパターン

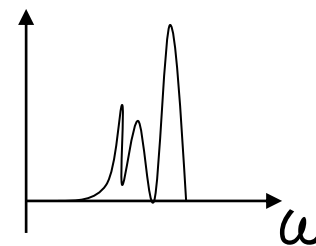
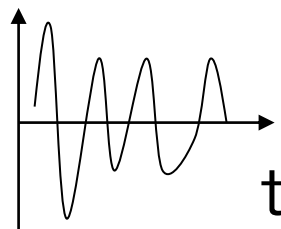


例：画像

静止画 -- 2次元

動画 --- 3次元

2) 時間的なパターン



時間軸でのパターン

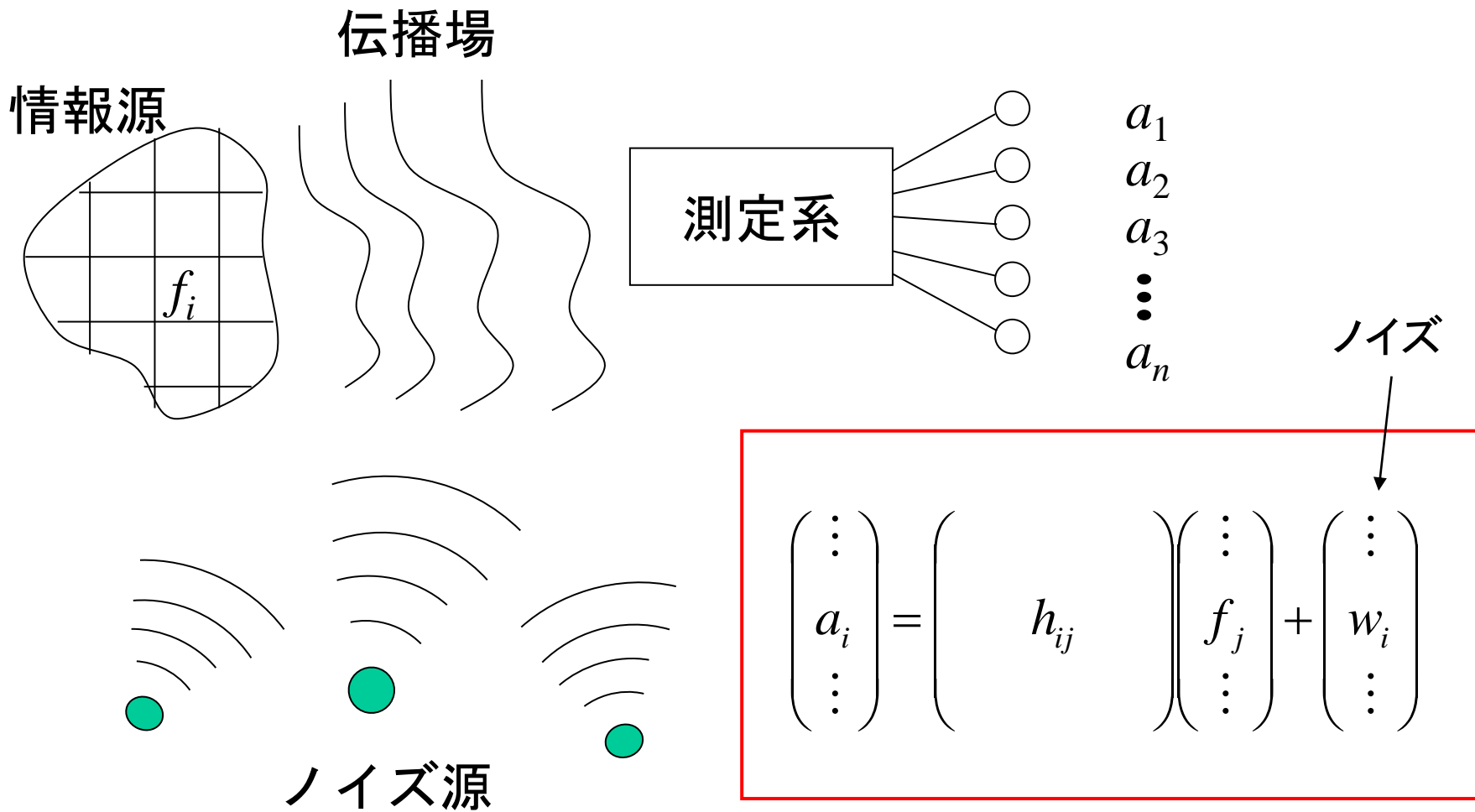
周波数軸でのパターン

3) 物理的パラメータのパターン

光のスペクトル、カベクトル

4) 上記の複合的なパターン

線形系におけるパターン計測



測定値 a から f を求める

「計測」と「通信」

[計測] 対象の状態が反映された信号から対象の状態を知る

[通信における受信]

情報を発信する装置からの信号を受け取り、送信者が伝えたかった情報を知る

[境界が曖昧な例] 人工物の計測、センサネットワーク
テレメトリー、GPS

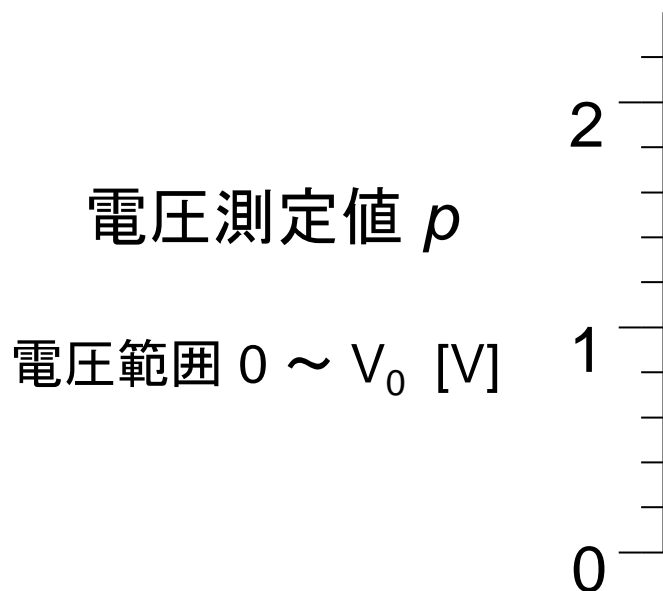
計測のモデル (1)

ある端子間の電圧を測定する。

観測される電圧 p は s を真の値、 w をノイズとして

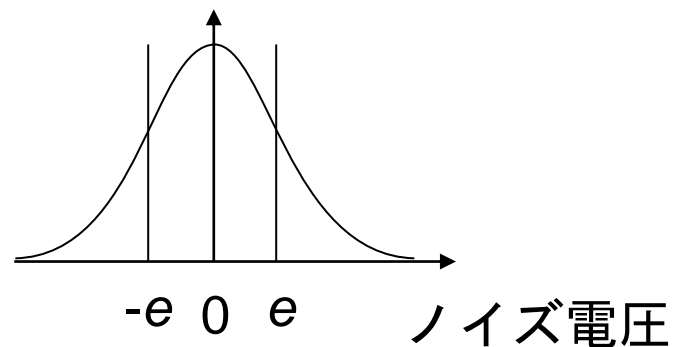
$$p = s + w$$

で与えられる。



ノイズ電圧確率密度の一例

ノイズ電圧の確率密度



ここからの話

「スカラーを1回測定」から

「真値が決まったパターンをなす」場合に拡張

計測のモデル (2)

ある端子間の電圧を測定する。観測値は

$$\mathbf{p} = \mathbf{s} + \mathbf{w} \quad (N \text{次元ベクトル})$$

である。

\mathbf{p} : N 個の観測データを並べた N 次元ベクトル

\mathbf{s} : 真値(信号)

\mathbf{w} : 白色雑音 ----- \mathbf{s} と \mathbf{w} は独立

信号エネルギー $S = \|\mathbf{s}\|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} s_i^2$

ノイズエネルギー $W = \|\mathbf{w}\|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} w_i^2$

問題

信号 s は N 個のデータからなる N 次元ベクトルであり、

$$s = A\phi$$

(ただし $\|\phi\| = 1$ であり、 A は定数)

であることがあらかじめ分かっている (ϕ は既知であり、 A は未知である) とき、エネルギー W の白色雑音のもとで検出可能な信号エネルギーの最小値を求めよ。ただし s と w は互いに相関がないものとする。

答

ノイズ w は以下の成分に分解できる。

$$w = a\phi + w'$$

ここで w' は ϕ と直交する成分(ベクトル)である。

測定値から A を決定する際、上記 a が不可避の誤差となる。

真値 s と w は無相関であるとする a^2 の期待値は

$$E[a^2] = \frac{W}{N}$$

で与えられる。

したがって、ノイズの中で信号の存在を確認するためには信号エネルギー S は W/N より大きくなければならない。

(ここまでのポイント)

一つの自由度に分配されるノイズエネルギーの期待値

$$E[a^2] = \frac{W}{N}$$

- N 点の信号を仮定
- ノイズの各点の値がランダムであることを仮定
- 分布が正規分布である場合、たとえば

$$|w_i| > 2.58\sqrt{W/N}$$

となる確率は 1 %

観測値 p を以下のように展開することはつねに可能

$$p = p_0 \phi + p_1 \psi_1 + p_2 \psi_2 + \cdots + p_{N-1} \psi_{N-1}$$

↑
信号に平行な
単位ベクトル

← ← ←
勝手に作った正規直交ベクトル

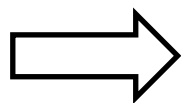
$$f = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2 + \cdots + a_N \psi_N$$

のエネルギー

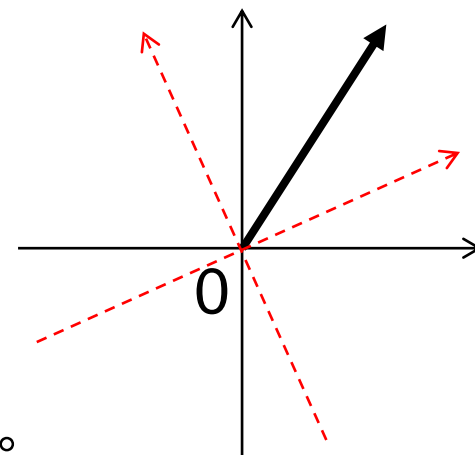
$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_N^2$$

は、直交系 ψ_i の選び方に依存しない

(Parseval's theorem)



ノイズのエネルギーについても同様。
どのような直交系で展開しても、各係数
の2乗和がエネルギーになる。



$\rho(a)$: a の確率密度

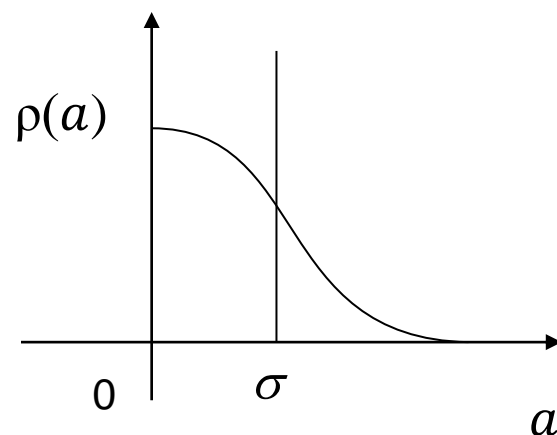
前スライドのパラメータ a は以下のように与えられる。

$$a = \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\phi} = \sum_{i=0}^{N-1} w_i \phi_i$$

もし w_i と w_j ($i \neq j$) が独立であり、それぞれの分散が σ^2 であるならば、 N が増大するにつれて $\rho(a)$ は分散 σ^2 のガウス分布に収束する。(Central limit theorem)

$$\rho(a) \rightarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right\}$$

* $\|\boldsymbol{\phi}\| = 1$ に注意



前スライドのパラメータ a の分散

$$\begin{aligned} E[a^2] &= E[(w_0\phi_0 + w_1\phi_1 + \cdots + w_{N-1}\phi_{N-1})^2] \\ &= E[(w_0\phi_0)^2 + (w_1\phi_1)^2 + \cdots + (w_{N-1}\phi_{N-1})^2] \\ &\quad (\because E[w_i w_j] = 0 \text{ for } i \neq j) \\ &= \sigma^2(\phi_0^2 + \phi_1^2 + \cdots + \phi_{N-1}^2) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

* 以下、理解の確認のため、 s 、 ϕ の表記を変更する

問題 信号強度推定、AM計測

エネルギー W の白色雑音のもとで信号の実効値を計測する。このときの計測誤差を求めよ。

ただし「信号波形が $s(n) = A\phi(n)$ であり A が未知」であることが前提。 ($n = 0, 2, 3, \dots, N - 1$)

* この考察を、現実の問題に適用してみよう

* 以下のスライドでは、 $s(n)$ や $\phi(n)$ などのデータ系列を「 N 次元ベクトル」として扱う。

答

問題中の表記における A の最良推定値は

$$\bar{A} = \sum_{n=0}^{N-1} p(n) \phi(n)$$

であり、不可避の誤差の標準偏差は答1で示されているように

$$\sigma_A = \sqrt{E[a^2]} = \sqrt{\frac{W}{N}}$$

である。したがって推定される実効値 (= root mean square value, RMS) の誤差(の標準偏差)は

$$\sigma = \frac{\sigma_A}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{W}}{N}$$

である。なお、信号の実効値は $\frac{A}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{S}{N}}$ である。

演習問題1

信号波形 $f(n)$ の「平均をとる」とは、

基底成分

$$\phi(n) = C$$

に平行な成分を求めることと等価であることを示せ。

$\|\phi(n)\| = 1$ となるように C を決めると、 $\phi(n) = \frac{1}{\sqrt{N}}(1, 1, \dots, 1)$ である。
 $f(n)$ に含まれる、 $\phi(n)$ に平行な成分を $A\phi(n)$ とすると、

$$A = \sum_{n=1}^N f(n) \phi(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N f(n)$$

であり、 A を求めることと平均を求めることは(係数を除いて)同じことである。

- $f(n)$ の各成分のノイズ分散を $\sigma^2 \left(= \frac{W}{N} \right)$ とすると、 A の分散も σ^2
- 平均値 $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n)$ の分散は $\frac{\sigma^2}{\sqrt{N}}$

演習問題 2

観測データ $p(n)$ から信号振幅を推定する。
誤差エネルギー

$$E = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \{p(n) - A\phi(n)\}^2$$

を最小化するように振幅を推定することと、 $p(n)$ の
 $\phi(n)$ への射影を求めることは等価であることを示せ。

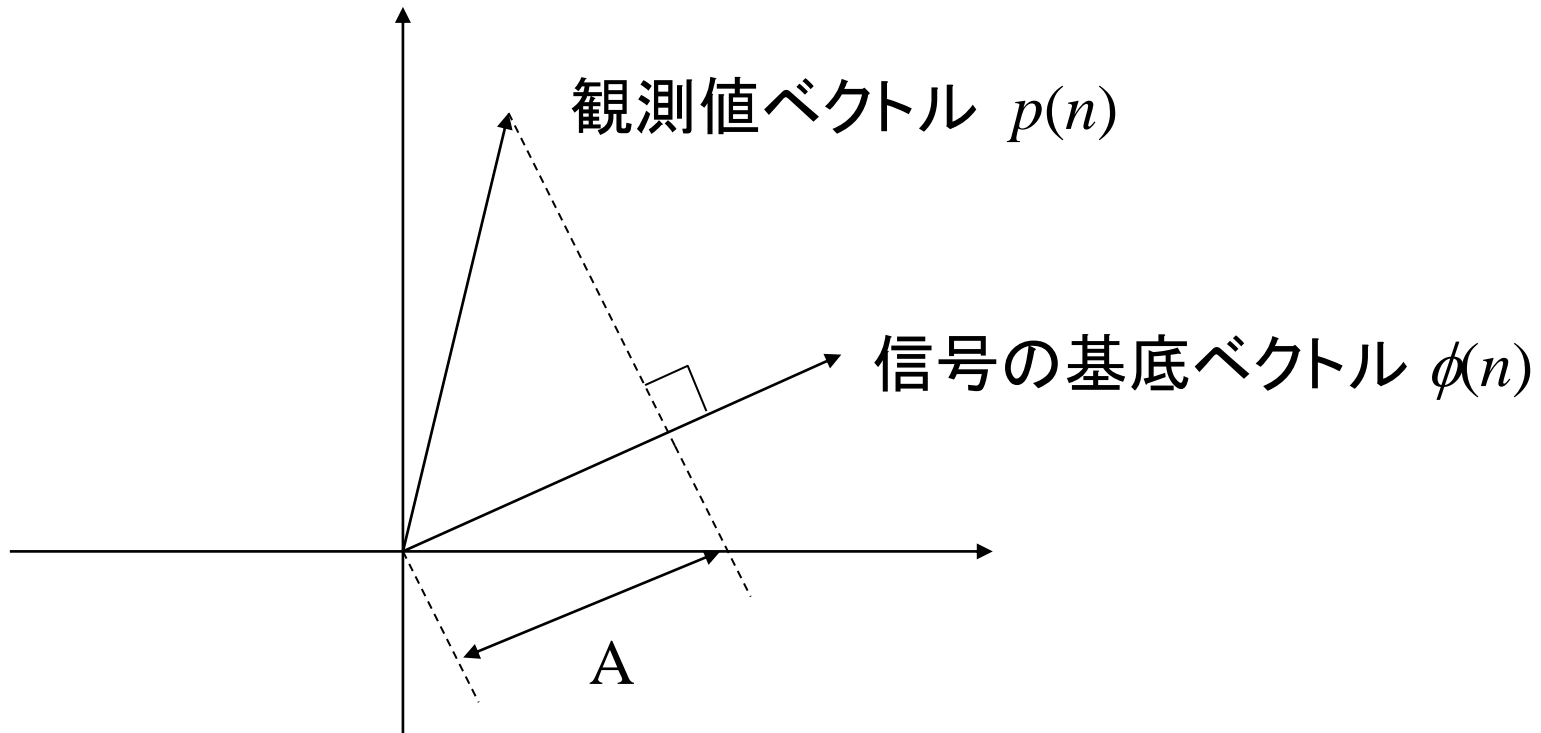
幾何学的に理解する (射影)

$$\sum_{n=0}^{N-1} \{p(n) - A\phi(n)\}^2$$

を最小化する A を
求める

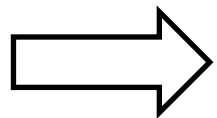
=

$p(n)$ に含まれる $\phi(n)$ に平行
な成分を求める



ここまでのまとめ

1. ノイズは「信号と平行な成分」と「直交する成分」に分解することができる。
2. N 次元空間の中で信号の方向(基本波形)が既知である場合、ノイズに含まれる「信号と直交する成分」は観測後の処理によって除くことができる。
3. ノイズに含まれる信号方向成分 $a\phi$ の係数 a が計測誤差を与える。典型的には a の平均と分散が誤差を表現するパラメータとなる。
4. N 次元ベクトルが計測され、各ベクトル成分は信号と相関のないランダムな値をとる場合、 a の分散(a^2 の期待値)はノイズエネルギーを W として W/N である。



上記3を確認し、現実の問題に適用してみよう

「誤差」という言葉について

1. ランダムに振舞う予測不能なノイズが加算されていることを想定している。ただしノイズについての情報が全くないわけではなく、その平均、分散は既知としている。
その場合、「計測誤差」は一つの値ではなく、その統計量である平均と分散(標準偏差)で表現される。

ただし誤解のない場合には、その標準偏差を単に「計測誤差」と表現する。

2. 多次元の計測において、各成分(自由度)のノイズエネルギーの期待値は等しく、それを多数加算した結果であるエネルギーの総和は一定であることを仮定していた。
3. この章の議論では、誤差の平均が 0 であることを仮定しているが、実際にはこれが有限であるノイズも存在する。(電子回路のオフセット、経年劣化など)
また、実際の計測システムにおいては、
 - ・ 有意な変化を読み取れる最小刻みである「分解能」と、
 - ・ 繰り返し計測して計測値が再現する「絶対精度」を区別する必要があるが、ここではこれらは区別していない。

演習問題 3 ～振幅(実効値)の計測

ノイズ密度 d [$V/\sqrt{\text{Hz}}$] の白色雑音のもとで周波数 f [Hz] の正弦波の信号を T [s] 観測した (ただし $f \gg 1/T$)。

信号実効値の(不可避の)計測誤差を求めよ。

ノイズ密度

問い： 以下の表記は何を意味するか？

$$2.0 \frac{\text{V}}{\sqrt{\text{Hz}}}$$

例: 帯域を 100 Hz とすると、ノイズの実効値は

$$2.0 \times \sqrt{100} = 20 \text{ [V]}$$

準備

➤ フーリエ変換 $f(t) \rightarrow F(\omega)$ は「基底の変更」の一種

離散フーリエ変換: $f(n) \rightarrow F(k)$

- 異なる周波数成分 $\cos(2\pi k_1 n)$ と $\cos(2\pi k_2 n)$ ($k_1 \neq k_2$) は直交している
- $\cos(2\pi kn)$ と $\sin(2\pi kn)$ も直交している

➤ 白色雑音 $w(t)$ に帯域幅 B のバンドパスフィルタを適用した後の信号実効値 ($w^2(t)$ の平均値の平方根) は、 \sqrt{B} に比例する。

∴ (離散信号で考えると)元の信号のエネルギーと、各周波数成分の2乗和は、比例する。(フーリエ変換の比例係数の取り方によって完全に等しくすることもできる)

(当然ながら)バンドパスフィルタの通過帯域の外で雑音がどのようなスペクトルをもっているとしても上記性質は変わらない。すなわち $w(t)$ は白色雑音でなくてもよい。

➤ B を必要以上に大きくして N を増大させても意味はない(推定精度が向上する訳ではない)。

答

ナイキスト周波数 B [Hz] をカットオフ周波数とするローパスフィルタを施してサンプリングし、 N 点のデータを得たとする。このとき(離散)白色雑音のエネルギーは

$$W = d^2 BN$$

で与えられる。

したがって、信号の位相が既知の場合には、信号実効値の推定誤差(の標準偏差)は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{W}{N} \frac{1}{N}} \quad (\text{問題 1-a}) \\ &= d \sqrt{\frac{B}{N}} = d \sqrt{\frac{B}{2BT}} = \frac{d}{\sqrt{2T}} \quad [\text{V}]\end{aligned}$$

答2

サンプリング
をせずに直接
的に理解する

信号長 T の信号をフーリエ変換するとき、周波数の刻み幅は $\Delta f = 1/T$ であるから、一つの周波数成分に分配される雑音の実効値は $d\sqrt{\Delta f} = d/\sqrt{T}$ である。

同じ信号周波数をもつ(互いに直交する)信号は2つ存在しているから、特定の位相成分に割り振られるノイズのエネルギーはその半分であり、その実効値は $d/\sqrt{2T}$ である。

信号の位相が不定の場合の実効値計測誤差

$s(n) = A\cos(\omega t)$ を仮定して推定した A の推定誤差 (標準偏差)

$$\sigma_A = \frac{d}{\sqrt{2T}}$$

$s(n) = B\cos(\omega t)$ を仮定して推定した B の推定誤差 (標準偏差)

$$\sigma_B = \frac{d}{\sqrt{2T}}$$

$C = \sqrt{A^2 + B^2}$ の分散は

$$E[(C - C_0)^2] = E[C^2 - 2CC_0 + C_0^2] = E[C^2] - C_0^2$$

$$= \sigma_A^2 + \sigma_B^2$$

$$= \frac{d^2}{T} \quad \left(\text{標準偏差は } \frac{d}{\sqrt{T}} \right)$$

演習問題 4 ～位相の計測

ノイズ密度 d [$V/\sqrt{\text{Hz}}$] の白色雑音のもとで周波数 f [Hz] の正弦波の信号を T [s] 観測する(ただし $f \gg 1/T$)。

上記設定において信号位相計測誤差の理論限界はどのように与えられるか。ただし信号の実効値は b であり、ノイズは信号に比べて十分小さいものと仮定してよい。

答

信号の真値を $s(t) = \sqrt{2}b\cos(\omega t)$ とし、これが微小位相 θ だけシフトされたものとして観測される可能性を考えよう。このシフトによる信号の差分は

$$\Delta s(t) = \sqrt{2}b \cos\{\omega t - \theta\} - \sqrt{2}b\cos(\omega t) \sim \sqrt{2}\theta b\sin(\omega t)$$

と近似される。この差分信号 $\sqrt{2}\theta b\sin(\omega t)$ を十分細かく N 点サンプリングしたデータのエネルギー $(\theta b)^2 N$ が、(1自由度に割り当てられる)エネルギー期待値 $(d^2/(2T))N$ より小さければ、ノイズの加算によって真の波形が θ シフトしたものとして見える可能性がある。それがノイズによる変質か、信号のシフトによるものか、データからは判別ができない。

ノイズの中に差分信号が含まれる確率が、そのエネルギーによってきまり、その期待値が $(d^2/(2T))N$ に等しいとすると、

$$E[(\theta b)^2 N] = \frac{d^2}{2T} N \quad \text{すなわち}$$

$$E[\theta^2] = \frac{d^2}{2b^2 T}$$

となり、これが 信号位相の推定値の不可避の分散を与える。

演習問題 5 ～パルス到来時間の計測

ノイズは白色で信号と相関がなく、ノイズ密度は d である。
信号は $t = t_0$ ($0 < t_0 < T$) 付近に局在したパルス状波形 $s(t) = r(t - t_0)$ とする。波形 $r(t)$ は既知であり、 $0 < t < T$ での信号観測波形から未知のパラメータ t_0 を推定したい。

t_0 の推定誤差限界はどのように与えられるか。
ただし $s(t)$ は微分可能であり、

$$P = \int_0^T \left(\frac{d}{dt} s(t) \right)^2 dt$$

を用いて解答してよい。

答

信号を Δt だけシフトしたときの差分信号

$$\Delta s(t) = s(t + \Delta t) - s(t) \sim \Delta t \frac{d}{dt} s(t) = \Delta t s'(t)$$

のエネルギーの期待値を考えよう。

差分信号 Δs のエネルギーは

$$e(\Delta t) = \sum_{i=1}^N \{\Delta s(t_i)\}^2 = \frac{N}{T} \int_0^T (\Delta t s'(t))^2 dt = \frac{N}{T} P \Delta t^2 \quad (1)$$

と書ける。 N は全サンプル点数である。前問と同様、既知の波形に平行なノイズ成分のエネルギーの期待値は $\frac{d^2}{2T} N$ である。 $e(\Delta t)$ の期待値がこれに等しいとすると、

$$E \left[\frac{N}{T} P \Delta t^2 \right] = \frac{d^2}{2T} N$$

これより

$$E[\Delta t^2] = \frac{d^2}{2P}$$

答2

サンプリングを
せずに直接的
に理解する

連続信号 $g(t)$ のエネルギーを $\int_0^T \{g(t)\}^2 dt$ と定義すると、
 $\Delta s(t)$ のエネルギーは、

$$e(\Delta t) = \int_0^T (\Delta t s'(t))^2 dt = \Delta t^2 P$$

である。

一方ノイズ信号に含まれる(位相を特定した)一つの周波数成分のエネルギーの期待値は

$$\frac{d^2}{2T} \cdot T = \frac{d^2}{2}$$

である。これが $e(\Delta t)$ の期待値に等しいとすると、

$$E[\Delta t^2] = \frac{d^2}{2P}$$

一般的な表現

信号 $s_\beta(n)$ ($n = 1, 2, \dots, N$) の測定値からパラメータ β を推定する計測システムにおいて、 β を $\Delta\beta$ だけシフトしたときの差分のエネルギー

$$e(\Delta\beta) = \sum_{n=1}^N \{s_{\beta+\Delta\beta}(n) - s_\beta(n)\}^2$$

が、この誤差パターン $\Delta s(n) = s_{\beta+\Delta\beta}(n) - s_\beta(n)$ に配分されるノイズエネルギー(の期待値) e_W より大きければ $\Delta\beta$ の変化を検出可能である。

逆にもし $e(\Delta\beta)$ が、 e_W より小さければ、観測データの変化がノイズによるものか、 $\Delta\beta$ のシフトによるものか、区別することができない。

クラメル・ラオの限界 (Cramér–Rao bound)

何らかの確率密度関数 $f(x; \theta)$ に従って分布する量 x の観測値から、未知母数 θ を推定することを考える。このとき、 θ に対する任意の不偏な推定量 $\hat{\theta}$ の分散は、フィッシャー情報量 $I(\theta)$ の逆数以上になる。

$$V[\hat{\theta}] \geq \frac{1}{I(\theta)}$$

フィッシャー情報量 $I(\theta)$ は

$$I(\theta) = E \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x; \theta) \right)^2 \right]$$

と定義される。

$f(x; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right)$ とすると、 $\ln f(x; \theta) = -\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2} - \ln(\sqrt{2\pi}\sigma)$ であるから、

$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x; \theta) = \frac{x-\theta}{\sigma^2}$ 、 $I(\theta) = \frac{1}{\sigma^2}$ となり、最終的に

$$V[\hat{\theta}] \geq \sigma^2$$

が導かれる。つまり、真値 θ に分散 σ^2 のガウス雑音を加算されて観測される場合、その推定量の分散は σ^2 以上となる。

直前のスライドで $\Delta s(n) = \Delta \mathbf{s} = \Delta \beta \mathbf{g}$ とみなせる場合には、 $(x, \theta) \rightarrow (\beta + \Delta \beta, \beta)$ と対応させると、 $\sigma^2 \rightarrow e_w / \|\mathbf{g}\|^2$ であり、 $V[\hat{\beta}] \geq e_w / \|\mathbf{g}\|^2$ が導かれる。

ここまでで分かったこと

あるノイズのもとで何等かのパラメータを計測しようとするとき、「そのノイズ(および計測時間)のもとでの計測限界」が存在する。

目の前にある計測システムの精度が、その計測限界まで到達していないのであれば、適切な信号処理によってその計測限界に近付くことができる。

ノイズと信号の性質を調べた結果、すでにその計測限界に到達しているようであれば、

計測システムの物理的構成を変更するか、

信号とノイズの性質について何等かの新しい情報(信号、ノイズのモデル)が導入されない限り、精度を向上させることはできない。

例) 実用的な振幅計測精度の確認方法

* 信号が既知の正弦波である場合

- 信号が入っていない状態(ノイズだけが観測されている状態)で観測を行う。測定されたパターンを $p(n)$ ($n = 1, \dots, N$) とする。
- $p(n)$ と信号パターン $\phi(n) = \frac{2}{N} \cos(2\pi f \Delta t n)$ の積和 $e = \sum_{n=1}^N p(n)\phi(n)$ を計算する。ただし Δt はサンプリング周期であり、 $T = N\Delta t$ である。
- 上記計測を複数回行い、 e のバラつき(標準偏差)を観察すると、それが $P(n)$ の振幅推定誤差(標準偏差)となる。
これ以上の精度が必要な場合には、計測系を変更するか(観測時間を長くすることも含む) 信号・ノイズについての何等かの新しい情報が必要になる。

*上記の例 $\phi(n) = \frac{2}{N} \cos(2\pi f \Delta t n)$ の係数 $\frac{2}{N}$ は、 $P(n)$ との積和がそのまま「正弦波信号の振幅推定値」になるように調整した。

* $\phi(n)$ が正弦波でない場合も同様。

赤外線計測システムの例

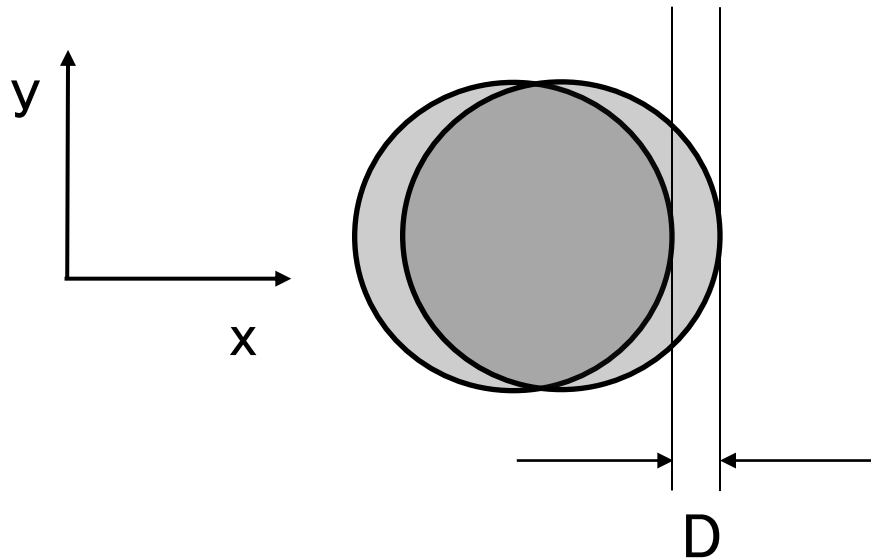
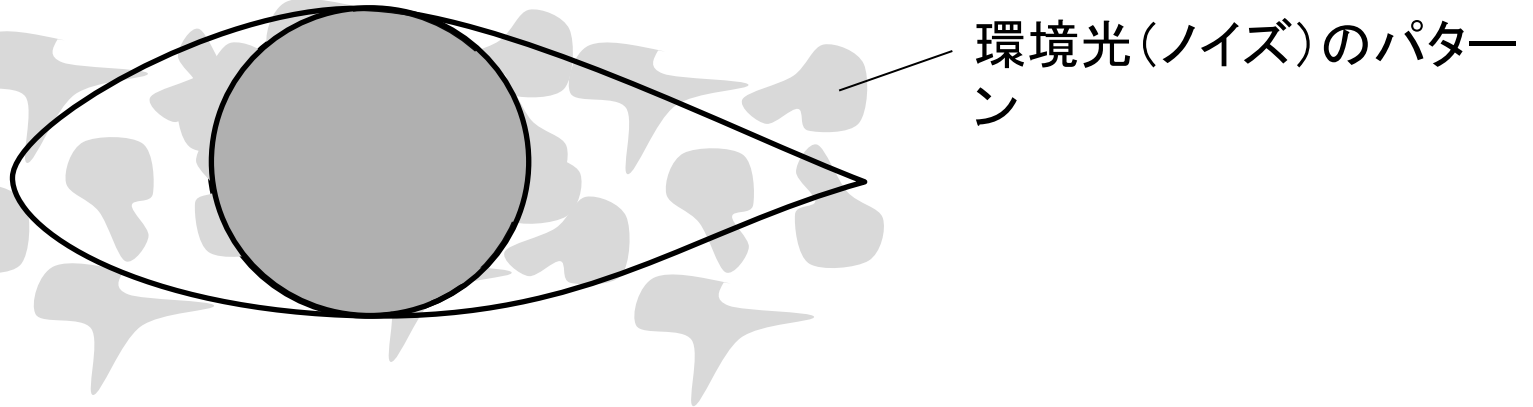
赤外線画像から目の位置を計測するシステムを開発している。

1 ms ごとに正確に目の位置を計測したいが、変動する環境光のもとでは精度が足りていない。

環境光による計測誤差の影響を抑制する方法を提案してみよう。



環境光のパターンがランダムである場合の測定限界の評価



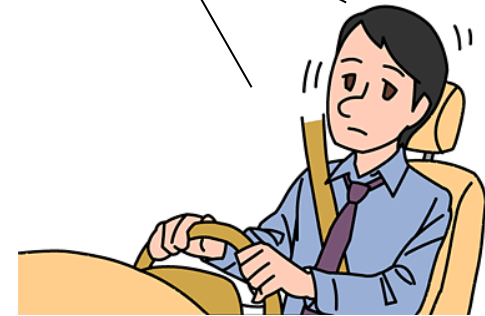
アプリケーションがが要求する目の位置の計測精度(許容される誤差)を D とする。

目の画像パターンを $s(x, y)$ とし、

$$\Delta s = s(x - D, y) - s(x, y)$$

のパターンのエネルギー $e(D)$ が、同じパターン(Δs と平行な成分)に配分されるノイズのエネルギー e_w より大きければ、その計測系のみで(アルゴリズムを正しくするだけで)要求精度に到達できる。

○ 赤外線



計測精度を向上させるための考え方

まずはノイズの性質を調べ、計測限界に達しているかどうか、確認する。

すでに計測限界を超えてしまっているのであれば、例えば以下のような取り組みが考えられる。

- 赤外線フィルタを強化し、照射光の波長から少しでもずれるとその光がカメラのセンサに到達できないようにする。
- 環境光に含まれない周波数で赤外線を変調し、その変調周波数成分のみを計測できるような機能をカメラに付加する。
- 人間の目の動きの規則性をモデルに導入する。
- 環境光の動きの規則をモデルに導入する。
- ノイズが特定の空間パターンをもつ場合、それと直交する成分のみから推定を行う。あるいは環境光のパターンが映り込みにくいカメラの角度を探す。

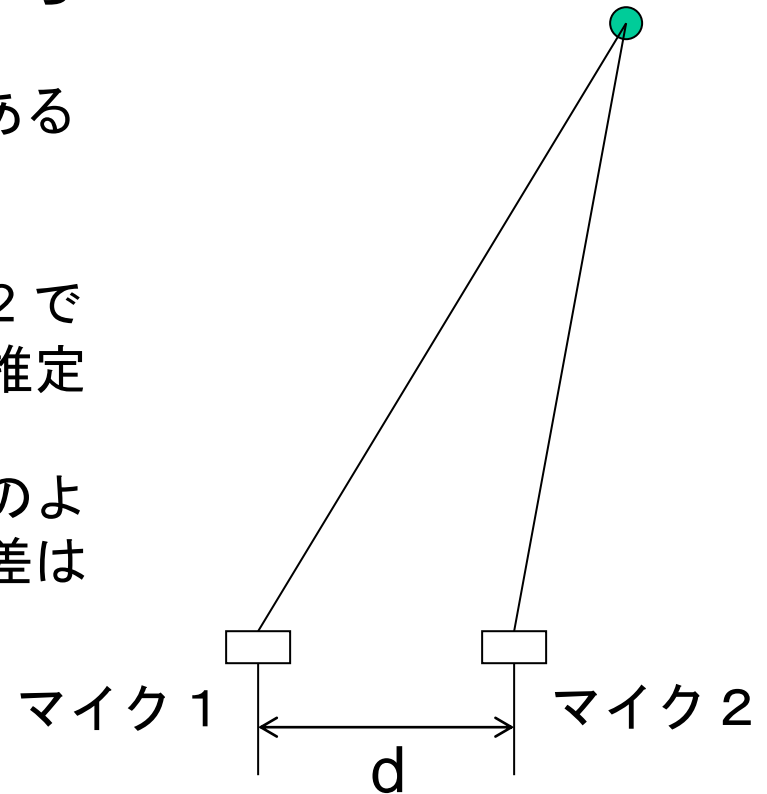
例題

十分遠方にある音源からの音響信号から音源の方角を推定する。

2次元問題とし、音源は十分遠方にあるものとする。

音源から放射された信号をマイク1, 2で観測し、その時間差から音源方向を推定するものとする。

観測される信号波形とノイズを以下のように仮定するとき、不可避の推定誤差はどのように与えられるか？



マイク1, 2での観測信号：

信号振幅 1 V, 500 Hz の正弦波

信号の観測時間：0.1 s

ノイズ：0.01 V/ $\sqrt{\text{Hz}}$